



Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Matrizenmultiplikation)

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ Matrizen.

Für welche Paare (K, M) mit $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$ kann man das Matrixprodukt $K \cdot M$ bilden? Berechnen Sie die möglichen Produkte $K \cdot M$ für $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$. Welche Beispiele findet man hier, die zeigen, daß die Multiplikation von Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist?

Lösung 1 Nur folgende Produkte sind möglich:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \end{pmatrix}, \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 34 & 25 \end{pmatrix}, \quad A \cdot G = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 34 \\ 41 & 50 & 73 \end{pmatrix}, \quad D \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 13 & 20 & 27 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 5 & 0 \\ 15 & 35 \end{pmatrix}, \quad F \cdot A = \begin{pmatrix} 29 & 37 & 45 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}, \quad F \cdot B = \begin{pmatrix} 36 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad F \cdot F = \begin{pmatrix} 36 & 7 \\ 5 & 35 \end{pmatrix}$$

$$G \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad G \cdot D = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 20 & 16 \\ 45 & 25 \end{pmatrix}, \quad G \cdot G = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 19 \\ 20 & 31 & 32 \\ 35 & 63 & 102 \end{pmatrix}, \quad D \cdot B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $AD \neq DA$.

Aufgabe 2 (Rechenregeln für Matrizen)

(i) Seien $A, B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times p}$. Zeigen Sie:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

(ii) Seien $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $Y := XZ$. Berechnen Sie

1. $X + Z$
2. $Y \cdot (X + Z)$
3. $YX + YZ$
4. $(X + Z) \cdot Y$
5. $XY + ZY$

und überprüfen Sie damit die Identitäten

$$Y \cdot (X + Z) = Y \cdot X + Y \cdot Z, \quad (1)$$

$$(X + Z) \cdot Y = X \cdot Y + Z \cdot Y. \quad (2)$$

Lösung 2

- (i) Wir zeigen, dass alle Einträge miteinander übereinstimmen. Seien also $i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, p\}$.
Dann:

$$\begin{aligned} ((A + B) \cdot C)_{ik} &= \sum_{j=1}^n (A + B)_{ij} \cdot (C)_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot c_{jk} = (A \cdot C)_{ik} + (B \cdot C)_{ik} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X + Z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ Y \cdot (X + Z) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ YX + YZ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ (X + Z) \cdot Y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ XY + ZY &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Rechenregeln für inverse Matrizen) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- (i) $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ invertierbar und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
(ii) $\forall l \in \mathbb{N}, l \geq 2: A_1, \dots, A_l \in K^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow A_1 \cdot \dots \cdot A_l$ invertierbar und $(A_1 \cdot \dots \cdot A_l)^{-1} = A_l^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$
(iii) $A \in K^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
(iv) $A \in K^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar und $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Hier bezeichnet A^{-1} die zu A inverse Matrix, A^T die zu A transponierte Matrix und $A^k := A \cdot \dots \cdot A$ (k -mal).

Lösung 3

- (i) Seien $A, B \in K^{n \times n}$. $A, B \in K^{n \times n}$ sind invertierbar genau dann, wenn es Matrizen $A^{-1}, B^{-1} \in K^{n \times n}$ gibt, sodass $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n = B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1}$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \quad (\text{Assoziativität von Matrixmultiplikation}) \\ &= B^{-1} \cdot E_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B = E_n. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot E_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} = E_n.\end{aligned}$$

Also ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(ii) Beweis durch vollständige Induktion über l :

Induktionsanfang ($l = 2$) ist Teilaufgabe (i).

Induktionsannahme (IA): Wir nehmen an, dass

$$(A_1 \cdot \dots \cdot A_l)^{-1} = A_l^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$$

für festes $l \geq 2$.

Induktionsschritt: Seien $A_1, \dots, A_{l+1} \in K^{n \times n}$ invertierbar. Dann

$$\begin{aligned}(A_1 \cdot \dots \cdot A_{l+1})^{-1} &= ((A_1 \cdot \dots \cdot A_l) \cdot A_{l+1})^{-1} \\ &= A_{l+1}^{-1} \cdot (A_1 \cdot \dots \cdot A_l)^{-1} && \text{nach (i)} \\ &= A_{l+1}^{-1} \cdot A_l^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} && \text{nach (IA)}.\end{aligned}$$

(iii) folgt direkt aus (ii).

(iv) Nach Satz 4.4.3 gilt für alle $A, B \in K^{n \times n}$: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Also:

$$E_n = E_n^T = (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T.$$

Mit anderen Worten, $(A^{-1})^T$ ist die multiplikative Inverse zu A^T , also $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Aufgabe 4 (2×2 Matrizen)

(i) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Finden Sie die zu M inverse Matrix $M^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, falls sie existiert. Welche Bedingungen müssen a, b, c, d erfüllen, damit M^{-1} überhaupt existiert? Finden Sie eine nicht invertierbare Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wobei M ungleich die Nullmatrix ist.

(ii) Betrachten Sie die Rotationsmatrix $R_\phi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$: $R_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass $R_\phi^{-1} = R_\phi^T = R_{-\phi}$.

Hinweis: Sie können z.B. am Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ $\sin(-\phi)$ und $\cos(-\phi)$ ohne weitere Vorkenntnisse bestimmen.

Lösung 4

(i) Wir suchen eine Matrix $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, sodass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bu \\ cx + dz & cy + du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Unbekannten lösen (falls möglich):

$$ax + bz = 1 \quad (1)$$

$$ay + bu = 0 \quad (2)$$

$$cx + dz = 0 \quad (3)$$

$$cy + du = 1 \quad (4)$$

Wir können wie folgt umformen (und beachten, dass diese Umformungen keine Äquivalenzumformungen sind):

$$(1) \implies c \cdot (ax + bz) = c \quad (1')$$

$$(3) \implies a \cdot (cx + dz) = 0 \quad (3')$$

also

$$(1') - (3') \implies (bc - ad)z = c.$$

Falls $bc - ad \neq 0$, erhalten wir

$$z = \frac{c}{bc - ad} = \frac{-c}{ad - bc}. \quad (5)$$

Gleichungen (1) und (3) lassen sich auch wie folgt umformen, um stattdessen die Variable x zu isolieren:

$$(1) \implies d \cdot (ax + bz) = d \quad (1'')$$

$$(3) \implies b \cdot (cx + dz) = 0 \quad (3'')$$

und somit $(ad - bc)x = d$. Also, falls (wieder) $bc - ad \neq 0 \iff ad - bc \neq 0$:

$$x = \frac{d}{ad - bc}. \quad (6)$$

Mit analogen Umformungen der Gleichungen (2) und (4) erhalten wir (unter der gleichen Bedingung, dass $ad - bc \neq 0$):

$$y = \frac{-b}{ad - bc} \quad (7)$$

$$u = \frac{a}{ad - bc}. \quad (8)$$

Wir setzen also

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und überprüfen, dass auch $M^{-1} \cdot M = E_2$:

$$\frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also, unter der Bedingung, dass $ad - bc \neq 0$, ist die Matrix immer invertierbar. Falls aber $ad - bc = 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$c = \lambda \cdot a \wedge d = \lambda \cdot b.$$

Aus (3) und (1) folgt

$$0 = cx + dz = \lambda \cdot (ax + bz) = \lambda \cdot 1 = \lambda,$$

also ist $\lambda = 0$ und somit sind $c = d = 0$. Aber dies würde (4) widersprechen.

Um M invertieren zu können, muss also nur die Bedingung $ad - bc \neq 0$ erfüllt werden. Insbesondere ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar.

(ii) Aus Teil (i) folgern wir

$$R_{\phi}^{-1} = \frac{1}{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Da $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ für alle $\phi \in \mathbb{R}$ (Satz des Pythagoras), sehen wir direkt, dass $R_{\phi}^{-1} = R_{\phi}^T$.

Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\cos(x) = \cos(-x)$. Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ungerade, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\sin(-x) = -\sin(x)$. Also ist

$$R_{\phi}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = R_{-\phi}.$$